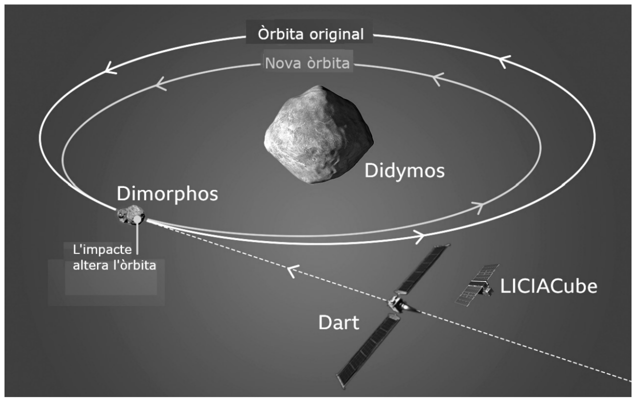
Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2023, Extraordinaria

mentoor.es

Problema 1. Campo Gravitatorio

El mes de novembre del 2021, la NASA va llançar la missió DART (Double Asteroid Redirection Test). Aquesta missió té per objectiu canviar l'òrbita de Dimorphos, un petit asteroide que orbita al voltant de Didymos, que és un asteroide més gran.



a) **A partir de la llei de la gravitació universal, trobeu l'expressió de la intensitat del camp gravitatori que crea un objecte astronòmic esfèric de massa M i radi R a la seva superfície. El diàmetre de Didymos és de 781 m i la seva densitat és de 2 146 kg/m^3. Calculeu el valor de la intensitat del camp gravitatori que crea Didymos a la seva superfície. Si Dimorphos té una massa de $4,42 \times 10^{10}$ kg i el radi orbital mitjà (distància entre els centres dels dos objectes) és d'$1,12$ km, calculeu el mòdul de la força gravitatòria mitjana entre Didymos i Dimorphos.**

b) **L'objectiu de la missió DART és colpejar Dimorphos, de tal manera que orbiti en una nova òrbita de radi menor, com s'indica en la figura anterior. Deduïu, a partir de principis fonamentals, l'expressió de la velocitat orbital d'un satèl·lit en funció del radi de l'òrbita. Argumenteu si Dimorphos orbitarà a més velocitat a la nova òrbita o a l'òrbita original.**

Dada:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ **N m^2 kg^{-2}.**
Nota: Considereu que les òrbites són circulars i que els dos asteroides són esfèrics.

Solució:

a) **A partir de la llei de la gravitació universal, trobeu l'expressió de la intensitat del camp gravitatori que crea un objecte astronòmic esfèric de massa M i radi R a la seva superfície. El diàmetre de Didymos és de 781 m i la seva densitat és de 2 146 kg/m^3. Calculeu el valor de la intensitat del camp gravitatori que crea Didymos a la seva superfície. Si Dimorphos té una massa de $4,42 \times 10^{10}$ kg i el radi orbital mitjà (distància entre els centres dels dos objectes) és d'$1,12$ km, calculeu el mòdul de la força gravitatòria mitjana entre Didymos i Dimorphos.**

La fuerza gravitatoria ejercida por una masa M sobre un objeto de masa m a una distancia r es:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

La intensidad del campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) en ese punto es:

$$g = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}.$$

En la superficie del objeto esférico, $r = R$, por lo que la expresión de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie es:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}.$$

Tenemos los siguientes datos:
- Diámetro de Didymos: $D = 781$ m.
- Radio de Didymos: $R = \frac{D}{2} = \frac{781 \text{ m}}{2} = 390{,}5$ m.
- Densidad de Didymos: $\rho = 2\,146$ kg/m^3.

El volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Entonces, la masa es:

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Sustituyendo los valores:

$$M = 2\,146 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3}\pi (390{,}5 \text{ m})^3 = 5{,}365 \cdot 10^{11} \text{ kg}.$$

QUeremos hallar la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Didymos. Utilizamos la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}365 \cdot 10^{11} \text{ kg}}{(390{,}5 \text{ m})^2} = 2{,}35 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ahora, buscamos calcular el módulo de la fuerza gravitatoria entre Didymos y Dimorphos. Se tiene que:
- Masa de Dimorphos: $m = 4{,}42 \cdot 10^{10}$ kg.
- Distancia entre centros (radio orbital): $r = 1{,}12$ km $= 1{,}120$ m.

Utilizamos la ley de gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Sustituimos los valores:

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}365 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot 4{,}42 \cdot 10^{10} \text{ kg}}{(1{,}120 \text{ m})^2} = 1{,}26 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Por lo tanto la intensidad del campo gravitatorio que Didymos crea en su superficie es $g = 2{,}35 \cdot 10^{-4}$ m/s^2 y el módulo de la fuerza gravitatoria entre Didymos y Dimorphos es $F = 1{,}26 \cdot 10^6$ N.

b) **L'objectiu de la missió DART és colpejar Dimorphos, de tal manera que orbiti en una nova òrbita de radi menor, com s'indica en la figura anterior. Deduïu, a partir de principis fonamentals, l'expressió de la velocitat orbital d'un satèl·lit en funció del radi de l'òrbita. Argumenteu si Dimorphos orbitarà a més velocitat a la nova òrbita o a l'òrbita original.**

Para un satélite de masa m orbitando alrededor de un cuerpo de masa M en una órbita circular de radio r, la fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria:

$$F_{\text{gravitatoria}} = F_{\text{centrípeta}} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Simplificamos m en ambos lados:

$$G \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}.$$

Multiplicamos ambos lados por r:

$$G \cdot \frac{M}{r} = v^2.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}.$$

De la expresión anterior, observamos que:

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Es decir, la velocidad orbital es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio orbital.

Si el radio de la órbita disminuye (es decir, r se hace más pequeño), entonces $\sqrt{r}$ disminuye y, por lo tanto, la velocidad orbital v aumenta.

Por lo tanto, después de ser impactado por la misión DART y entrar en una órbita de radio menor, Dimorphos orbitará a una mayor velocidad que en la órbita original.

Problema 2. Campo Electromagnético

En un laboratori s'ha fet l'experiment que es mostra a la figura 1. En una cubeta de plàstic transparent s'ha afegit aproximadament un centímetre d'aigua de l'aixeta, i s'han col·locat banda i banda dues plaques conductores de coure separades a una distància de 20 cm. Les plaques s'han connectat a una font d'alimentació. A sota de la cubeta transparent hi ha un paper quadriculat que permet determinar les posicions (figura 1). A la placa connectada al terminal negatiu de la font d'alimentació s'hi ha connectat el terminal negatiu del voltímetre. El terminal positiu del voltímetre s'ha mogut per diferents punts de la quadrícula per a mesurar el potencial elèctric i el resultat s'indica a la taula de sota.

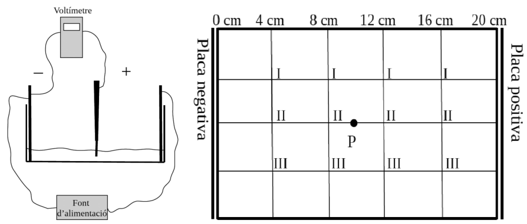


FIGURA 1. Esquema del muntatge de l'experiment i paper quadriculat de la cubeta

x (cm)	V_I *(V)*	V_{II} *(V)*	V_{III} *(V)*	$V_{mitjà}$ *(V)*
4,00	1,4	1,5	1,4	
8,00	2,8	2,9	2,8	
12,00	4,2	4,3	4,4	
16,00	5,7	5,7	5,8	

a) **Empleneu la taula de dalt amb la mitjana aritmètica del potencial elèctric a les posicions x = 4, 8, 12 i 16 cm. Dibuixeu les línies equipotencials a x = 4, 8, 12 i 16 cm i les línies de camp elèctric en el paper quadriculat de la cubeta (figura 1). Representeu en els eixos de coordenades (figura 2) la mitjana aritmètica del potencial elèctric en funció de x. Calculeu el mòdul del camp elèctric a partir de la gràfica.**

b) **Col·loquem una càrrega positiva de 3,00 mC al punt P indicat dins la cubeta en la figura 1. Indiqueu quina trajectòria seguirà. Representeu en el paper quadriculat (figura 1) la direcció i el sentit de la força que aplica el camp elèctric sobre aquesta càrrega. Determineu el mòdul de la força. Calculeu el treball que fa el camp elèctric per moure la càrrega des de x = 8 cm fins a x = 0 cm.**

Solució:

a) **Empleneu la taula de dalt amb la mitjana aritmètica del potencial elèctric a les posicions x = 4, 8, 12 i 16 cm. Dibuixeu les línies equipotencials a x = 4, 8, 12 i 16 cm i les línies de camp elèctric en el paper quadriculat de la cubeta (figura 1). Representeu en els eixos de coordenades (figura 2) la mitjana aritmètica del potencial elèctric en funció de x. Calculeu el mòdul del camp elèctric a partir de la gràfica.**

Calculamos la media aritmética para cada posición:

$$V_{\text{media}} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{n},$$

donde n es el número de mediciones en cada posición.

– Para $x = 4\,\text{cm}$:

$$V_{\text{media}} = \frac{1{,}4\text{ V} + 1{,}5\text{ V} + 1{,}4\text{ V}}{3} = \frac{4{,}3\text{ V}}{3} = 1{,}43\text{ V}.$$

– Para $x = 8\,\text{cm}$:

$$V_{\text{media}} = \frac{2{,}8\text{ V} + 2{,}9\text{ V} + 2{,}8\text{ V}}{3} = \frac{8{,}5\text{ V}}{3} = 2{,}83\text{ V}.$$

– Para $x = 12\,\text{cm}$:

$$V_{\text{media}} = \frac{4{,}2\ \text{V} + 4{,}4\ \text{V} + 4{,}3\ \text{V}}{3} = \frac{12{,}9\ \text{V}}{3} = 4{,}30\ \text{V}.$$

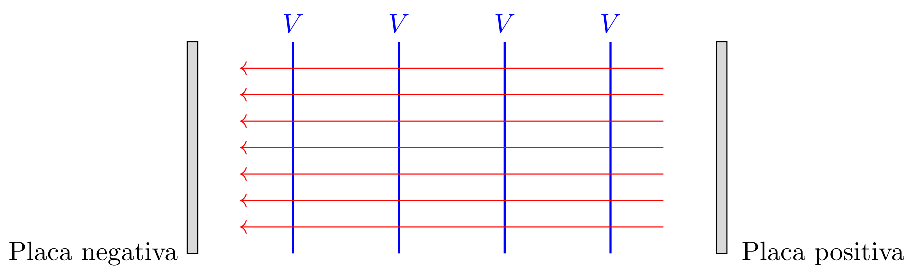
– Para $x = 16\,\text{cm}$:

$$V_{\text{media}} = \frac{5{,}7\ \text{V} + 5{,}8\ \text{V} + 5{,}7\ \text{V}}{3} = \frac{17{,}2\ \text{V}}{3} = 5{,}73\ \text{V}.$$

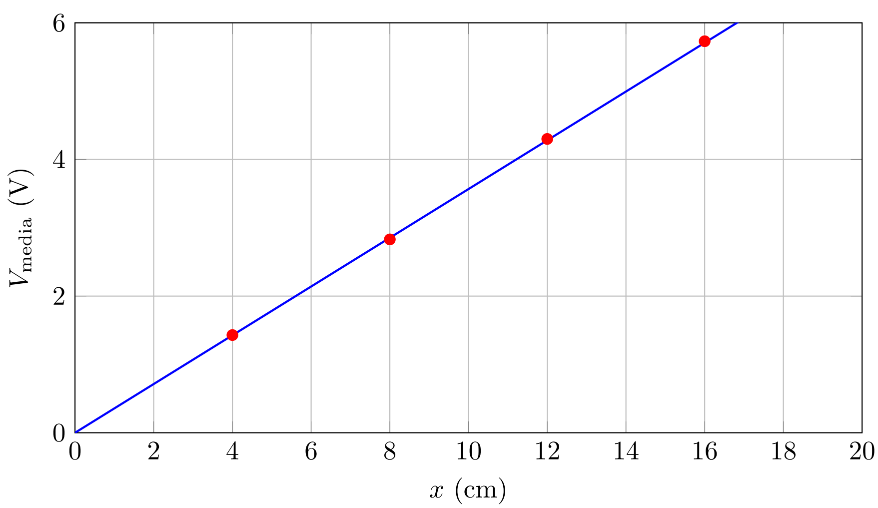
La tabla actualizada queda:

x (cm)	V_1 (V)	V_2 (V)	V_3 (V)	V_{media} (V)
4	1,4	1,5	1,4	1,43
8	2,8	2,9	2,8	2,83
12	4,2	4,4	4,3	4,30
16	5,7	5,8	5,7	5,73

Las líneas equipotenciales son paralelas a las placas y se encuentran en las posiciones $x = 4\,\text{cm}$, $8\,\text{cm}$, $12\,\text{cm}$ y $16\,\text{cm}$. Las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a las líneas equipotenciales y apuntan desde el potencial mayor al menor. En este caso, el potencial aumenta desde la placa negativa (potencial 0 V) a la positiva, por lo que el campo eléctrico apunta hacia la placa negativa:



La gráfica del potencial eléctrico en función de x es:



El campo eléctrico E es el negativo de la derivada del potencial con respecto a la posición:

$$E = -\frac{dV}{dx}.$$

Dado que el potencial varía linealmente con x, podemos calcular el campo eléctrico como la pendiente de la gráfica $V(x)$:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

Tomando dos puntos de la gráfica:

$$\Delta V = V_{\text{media}}(16 \text{ cm}) - V_{\text{media}}(4 \text{ cm}) = 5{,}73 \text{ V} - 1{,}43 \text{ V} = 4{,}30 \text{ V},$$

$$\Delta x = 16 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$

Entonces:

$$E = -\frac{4{,}30 \text{ V}}{12 \text{ cm}} = -0{,}358 \ \frac{\text{V}}{\text{cm}} = -35{,}8 \ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

El signo negativo indica que el campo eléctrico apunta en dirección negativa de x.

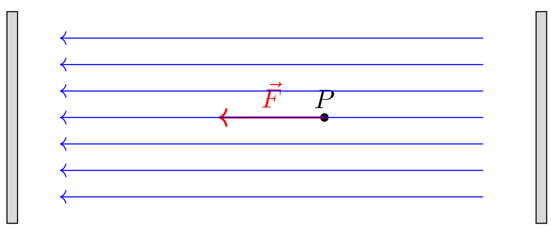
Por lo tanto, el módulo del campo eléctrico es $\boldsymbol{E = 35{,}8 \ \frac{V}{m}}$.

b) **Col·loquem una càrrega positiva de 3,00 mC al punt P indicat dins la cubeta en la figura 1. Indiqueu quina trajectòria seguirà. Representeu en el paper quadriculat (figura 1) la direcció i el sentit de la força que aplica el camp elèctric sobre aquesta càrrega. Determineu el mòdul de la força. Calculeu el treball que fa el camp elèctric per moure la càrrega des de x = 8 cm fins a x = 0 cm.**

La carga positiva se moverá en la dirección del campo eléctrico, es decir, desde la placa positiva hacia la placa negativa. Por lo tanto, seguirá una trayectoria rectilínea en dirección negativa del eje x. La fuerza eléctrica sobre la carga viene dada por:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}.$$

Dado que $q > 0$ y $\vec{E}$ apunta en dirección negativa de x, la fuerza también apunta en dirección negativa de x.



Sabemos que:
- $q = 3{,}00 \text{ mC} = 3{,}00 \cdot 10^{-3}$ C.
- $E = 35{,}8 \ \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

Entonces,

$$F = q \cdot E = 3{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot 35{,}8 \ \frac{\text{V}}{\text{m}} = 0{,}107 \text{ N}.$$

El trabajo W realizado por el campo eléctrico al mover la carga desde $x = 8$ cm hasta $x = 0$ cm es:

$$W = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}).$$

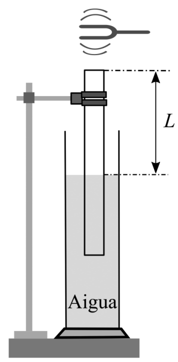
El potencial en $x = 8$ cm es $V_{\text{inicial}} = 2{,}83$ V y en $x = 0$ cm es $V_{\text{final}} = 0$ V:

$$W = -(3{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ C}) \cdot (0 \text{ V} - 2{,}83 \text{ V}) = -(3{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ C}) \cdot (-2{,}83 \text{ V}) = 8{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Por lo tanto, el módulo de la fuerza es 0,107 N y el trabajo realizado por el campo eléctrico es 8,49 mJ.

Problema 3. Ondas

Duem a terme una experiència de ressonància en un tub amb aigua que consisteix a submergir un tub obert pels dos extrems en un recipient que conté aigua, tal com es mostra en la figura de la dreta. Damunt de l'extrem superior del tub fem vibrar un diapasó, que emet un so de freqüència 442 Hz. La longitud de la columna d'aire (L) s'ajusta elevant el tub fora de l'aigua fins a trobar un punt on es produeix la ressonància (se sent una nota intensa). Comencem l'experiència amb tot el tub submergit i observem la primera ressonància quan L = 19,3 cm i la segona ressonància quan L = 58,0 cm.



a) **Dibuixeu la forma de l'ona ressonant per a la primera i segona ressonàncies. Indiqueu en tots dos casos de quin harmònic es tracta i identifiqueu els ventres i els nodes. Justifiqueu per què en tots dos casos la longitud d'ona no varia. Determineu la longitud del tub que ha de quedar per sobre de l'aigua quan ressona el cinquè harmònic.**

b) **A partir dels resultats de l'experiència, determineu la velocitat del so a l'aire. Si substituïm l'aigua per glicerina, variarà aquest resultat? Raoneu la resposta.**

Dades:
La velocitat del so a l'aigua és de 1 493 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.
La velocitat del so a la glicerina és de 1 904 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solució:

a) **Dibuixeu la forma de l'ona ressonant per a la primera i segona ressonàncies. Indiqueu en tots dos casos de quin harmònic es tracta i identifiqueu els ventres i els nodes. Justifiqueu per què en tots dos casos la longitud d'ona no varia. Determineu la longitud del tub que ha de quedar per sobre de l'aigua quan ressona el cinquè harmònic.**

Dado que el tubo está abierto por ambos extremos cuando lo elevamos del agua, la columna de aire actúa como un tubo abierto por ambos extremos mientras la parte sumergida impide el paso del aire. Sin embargo, en este caso, dado que el tubo está abierto en la parte superior y cerrado en la parte inferior (por el agua), se comporta como un *tubo cerrado en un extremo* y *abierto en el otro.* En un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro, las condiciones de resonancia ocurren cuando se forma un nodo en el extremo cerrado (agua) y un vientre en el extremo abierto (superficie del tubo). La

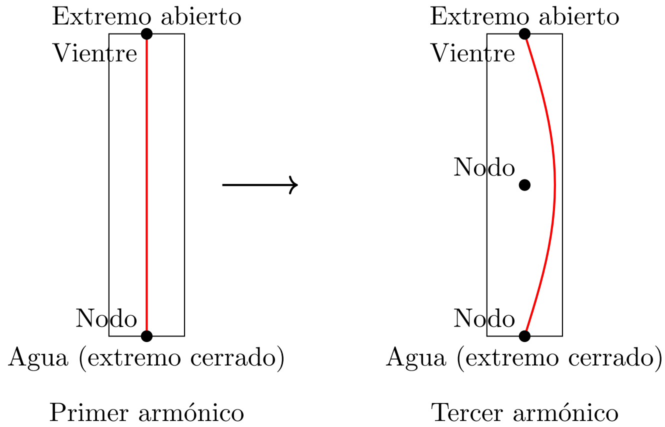
primera resonancia ($L = 19{,}3$ cm) se trata del *primer armónico* o *frecuencia fundamental.* La longitud del tubo corresponde a un cuarto de la longitud de onda:

$$L = \frac{\lambda_1}{4}.$$

La segunda resonancia ($L = 58{,}0$ cm) se trata del *tercer armónico.* La longitud del tubo corresponde a tres cuartos de la longitud de onda:

$$L = \frac{3\lambda_3}{4}.$$

Los diagramas de las ondas estacionarias son:



En ambos casos, hay un *nodo* en el extremo cerrado (agua) y un *vientre* en el extremo abierto. En la segunda resonancia (tercer armónico), aparece un nodo adicional en el centro del tubo.La longitud de onda λ del sonido en el aire depende de la frecuencia y de la velocidad del sonido en el aire:

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

Como la frecuencia del diapasón es constante ($f = 442$ Hz) y la velocidad del sonido en el aire es constante a temperatura ambiente, la longitud de onda es la misma en todos los armónicos. En un tubo cerrado en un extremo, los armónicos permitidos son los impares ($n = 1, 3, 5, \dots$). La relación para el n-ésimo armónico es:

$$L = \frac{n\lambda}{4}.$$

Sabemos que la longitud de onda es:

$$\lambda = 4L_1 = 4 \cdot 0{,}193 \text{ m} = 0{,}772 \text{ m}.$$

Para el quinto armónico ($n = 5$):

$$L = \frac{5\lambda}{4} = \frac{5 \cdot 0{,}772 \text{ m}}{4} = 0{,}965 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la longitud del tubo que debe quedar por encima del agua es $L = 96{,}5$ cm.

b) A partir dels resultats de l'experiència, determineu la velocitat del so a l'aire. Si substituïm l'aigua per glicerina, variarà aquest resultat? Raoneu la resposta.

Utilizando los datos de la primera y segunda resonancias:
- Primera resonancia ($n = 1$): $L_1 = 19{,}3$ cm $= 0{,}193$ m.
- Tercera resonancia ($n = 3$): $L_3 = 58{,}0$ cm $= 0{,}580$ m.

La relación entre la longitud del tubo y la longitud de onda es:

$$L_n = \frac{n\lambda}{4}.$$

Para $n = 1$:

$$L_1 = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4L_1 = 4 \cdot 0{,}193 \text{ m} = 0{,}772 \text{ m}.$$

Para $n = 3$:

$$L_3 = \frac{3\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4L_3}{3} = \frac{4 \cdot 0{,}580 \text{ m}}{3} = 0{,}773 \text{ m}.$$

Ambas mediciones nos dan una longitud de onda muy similar, lo cual es coherente. Calculamos el valor promedio de λ:

$$\lambda = \frac{0{,}772 \text{ m} + 0{,}773 \text{ m}}{2} = 0{,}7725 \text{ m}.$$

Ahora, calculamos la velocidad del sonido en el aire:

$$v = f \cdot \lambda = 442 \text{ Hz} \cdot 0{,}7725 \text{ m} = 341{,}3 \text{ m/s}.$$

Si sustituimos el agua por glicerina, el extremo inferior del tubo sigue siendo un extremo cerrado, ya que la glicerina también impide el movimiento del aire en ese extremo. Dado que el sonido que analizamos es el que se propaga en el aire dentro del tubo, y la glicerina sólo afecta al extremo cerrado, la velocidad del sonido en el aire no varía por cambiar el líquido. Por lo tanto, *el resultado no variará*, ya que la velocidad del sonido en el aire es independiente del líquido utilizado en el extremo inferior.

Por lo tanto, la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente 341 m/s. Si sustituimos el agua por glicerina, este resultado no variará porque la velocidad del sonido en el aire no depende del líquido en el que se sumerge el extremo cerrado del tubo.

Problema 4. Campo Electromagnético

Un espectròmetre de masses és un aparell que permet determinar la relació càrrega/massa d'ions. L'espectròmetre de masses conté tres parts diferenciades. La primera part és un filament que ionitza les molècules o àtoms que entren dins l'espectròmetre. A la sortida del filament tots els ions tenen una càrrega negativa. A la segona part de l'aparell els ions passen per un selector de velocitats (figura 1) que està format per dues plaques paral·leles, entre les quals es genera un camp elèctric uniforme. La separació entre aquestes plaques és d'1,50 cm. Entre les plaques també es genera un camp magnètic uniforme de $0,50$ T perpendicular al pla del paper i en sentit sortint, tal com es mostra en la figura 1.

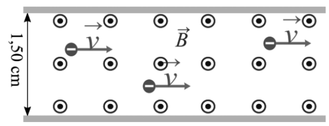


Figura 1

a) **Volem que el selector de velocitats només deixi passar els ions que es moguin a una velocitat de $2,00 \times 10^5$ m s^{-1}. Determineu la diferència de potencial que hem d'aplicar entre les plaques perquè els ions que es mouen a aquesta velocitat no es desviïn. Quina placa s'ha de connectar a potencial alt i quina a potencial baix? Justifiqueu les respostes i representeu les forces que actuen sobre un ió. Digueu si el selector de velocitats configurat d'aquesta manera també funciona per a ions positius i justifiqueu la resposta.**

b) **La tercera part de l'espectròmetre es troba a la sortida del selector de velocitats i és una regió on hi ha un altre camp magnètic uniforme de $0,20$ T, perpendicular al pla del paper i en sentit entrant (figura 2). Les pantalles laterals permeten mesurar la posició a què impacten els ions i d'aquesta manera poder determinar-ne la massa. Representeu esquemàticament sobre la figura 2 la trajectòria que descriuen els ions que surten del selector de velocitats indicant la direcció i el sentit de la força que exerceix el camp magnètic en un punt de la trajectòria. Justifiqueu la resposta. Calculeu a quina distància de la sortida del selector de velocitats impactarà l'ió dels isòtops del neó $^{20}Ne^{-}$ (l'ió té la mateixa càrrega que un electró).**

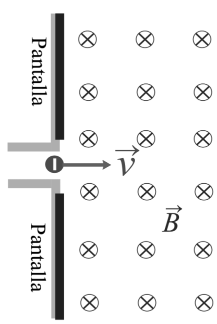


Figura 2

Dades:
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ C.
Massa de l'ió: $^{20}Ne^{-} = 3,32 \times 10^{-26}$ kg.

Solució:

a) **Volem que el selector de velocitats només deixi passar els ions que es moguin a una velocitat de $2,00 \times 10^5$ m s^{-1}. Determineu la diferència de potencial que hem d'aplicar**

entre les plaques perquè els ions que es mouen a aquesta velocitat no es desviïn. Quina placa s'ha de connectar a potencial alt i quina a potencial baix? Justifiqueu les respostes i representeu les forces que actuen sobre un ió. Digueu si el selector de velocitats configurat d'aquesta manera també funciona per a ions positius i justifiqueu la resposta.

Para que los iones no se desvíen en el selector de velocidades, la fuerza eléctrica $\vec{F}_E$ y la fuerza magnética $\vec{F}_M$ deben cancelarse:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_M = 0.$$

Dado que los iones tienen carga negativa ($q = -e$), las fuerzas son:

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} \qquad \text{y} \qquad \vec{F}_M = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}.$$

Para que las fuerzas se cancelen en módulo y dirección:

$$|\vec{F}_E| = |\vec{F}_M| \quad \Rightarrow \quad |q|E = |q|vB \implies E = vB.$$

Sustituyendo los valores:

$$E = (2{,}00 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}) \cdot 0{,}50 \text{ T} = 1{,}00 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

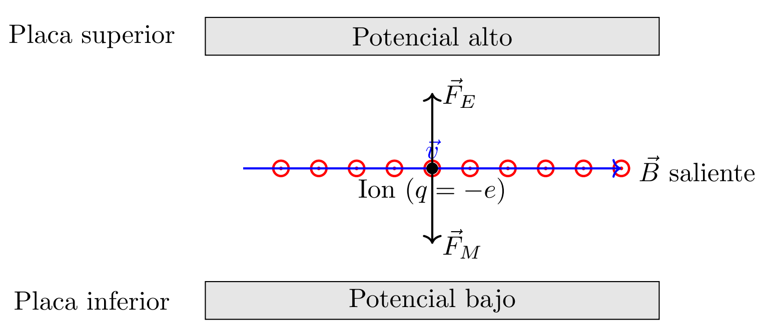
La diferencia de potencial ΔV entre las placas está relacionada con el campo eléctrico E y la distancia d entre las placas:

$$\Delta V = E \cdot d.$$

Con $d = 1{,}50$ cm $= 0{,}0150$ m:

$$\Delta V = (1{,}00 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}) \cdot 0{,}0150 \text{ m} = 1{,}50 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

La dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ es de la placa de potencial alto a la de potencial bajo. Dado que los iones son negativos y queremos que la fuerza eléctrica $\vec{F}_E$ apunte hacia arriba (para cancelar a $\vec{F}_M$), el campo eléctrico $\vec{E}$ debe apuntar hacia abajo, ya que $\vec{F}_E = q\vec{E}$ y $q < 0$. Entonces, la placa superior debe estar a *potencial alto* y la placa inferior debe estar a *potencial bajo*. Representamos las fuerzas que actúan sobre un ion:



Para iones positivos ($q = +e$), la fuerza eléctrica $\vec{F}_E = q\vec{E}$ estará en la misma dirección que $\vec{E}$ (hacia abajo), mientras que la fuerza magnética $\vec{F}_M = q\vec{v} \cdot \vec{B}$. Para una carga positiva moviéndose hacia la derecha y con $\vec{B}$ saliendo del plano, aplicando la regla de la mano derecha, la fuerza magnética $\vec{F}_M$ apunta hacia arriba. Por lo tanto, las fuerzas eléctrica y magnética están en direcciones opuestas y pueden cancelarse.

Por lo tanto, el selector de velocidades configurado de esta manera también funciona para iones positivos porque las fuerzas eléctrica y magnética están en direcciones opuestas y pueden equilibrarse para que los iones positivos no se desvíen

b) La tercera part de l'espectròmetre es troba a la sortida del selector de velocitats i és una regió on hi ha un altre camp magnètic uniforme de $0,20$ T, perpendicular al pla del paper i en sentit entrant (figura 2). Les pantalles laterals permeten mesurar la posició a què impacten els ions i d'aquesta manera poder determinar-ne la massa. Representeu esquemàticament sobre la figura 2 la trajectòria que descriuen els ions que surten del selector de velocitats indicant la direcció i el sentit de la força que exerceix el camp magnètic en un punt de la trajectòria. Justifiqueu la resposta. Calculeu a quina distància de la sortida del selector de velocitats impactarà l'ió dels isòtops del neó ^{20}Ne^{-} (l'ió té la mateixa càrrega que un electró).

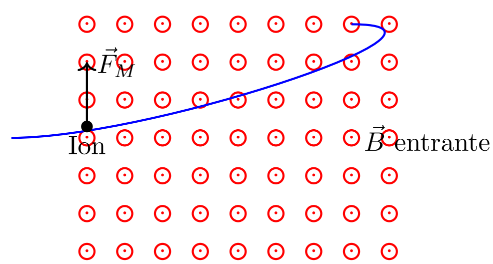
Al entrar en el campo magnético entrante ($\vec{B}$ hacia adentro del plano), el ion negativo experimentará una fuerza magnética dada por:

$$\vec{F}_M = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}.$$

Para una carga negativa moviéndose hacia la derecha y $\vec{B}$ entrante, aplicamos la regla de la mano derecha (o consideramos que la fuerza es opuesta a la de una carga positiva):

- Dirección de $\vec{v}$: hacia la derecha.
- $\vec{B}$: hacia adentro del plano.
- Para carga negativa, la fuerza será opuesta a la que tendría una carga positiva.

Para una carga positiva, $\vec{F}_M$ apuntaría hacia abajo; por lo tanto, para una carga negativa, $\vec{F}_M$ apunta hacia arriba. Como resultado, el ion negativo describe una trayectoria circular hacia arriba:



El ion describirá una trayectoria circular de radio r dado por:

$$F_M = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Pero $F_M = |q| \cdot v \cdot B$, por lo que:

$$|q| \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}.$$

Sustituimos los valores:

- $m = 3{,}32 \cdot 10^{-26}$ kg.
- $v = 2{,}00 \cdot 10^{5}$ m s^{-1}.
- $|q| = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.
- $B = 0{,}20$ T.

$$r = \frac{3{,}32 \cdot 10^{-26}\ \text{kg} \cdot 2{,}00 \cdot 10^{5}\ \text{m s}^{-1}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}20\ \text{T}} = 0{,}207\ \text{m}.$$

La distancia desde la salida hasta el punto de impacto es el diámetro de la trayectoria semicircular:

$$D = 2r = 2 \cdot 0{,}207\ \text{m} = 0{,}414\ \text{m}.$$

Por lo tanto, el ion impactará a una distancia de 41,4 cm de la salida del selector de velocidades.

Problema 5. Ondas

a) **Justifiqueu si es podria determinar la massa d'un objecte penjant-lo d'una molla de constant elàstica coneguda (100 N/m) i deixant-lo oscil·lar unes quantes vegades i, en cas afirmatiu, expliqueu com la calcularíeu. Obtindríem el mateix resultat si ho féssim a la Lluna? Negligiu l'efecte de la força de fricció.**

b) **Deduïu l'equació de moviment de l'objecte a partir de l'equació del moviment harmònic simple (MHS) tenint en compte que l'amplitud del moviment és de 6,00 cm, que la freqüència d'oscil·lació és de 10,0 Hz i que el moviment s'inicia quan l'acceleració és màxima i positiva. Calculeu la velocitat i l'acceleració màximes del MHS a partir de l'equació de moviment.**

Solució:

a) **Justifiqueu si es podria determinar la massa d'un objecte penjant-lo d'una molla de constant elàstica coneguda (100 N/m) i deixant-lo oscil·lar unes quantes vegades i, en cas afirmatiu, expliqueu com la calcularíeu. Obtindríem el mateix resultat si ho féssim a la Lluna? Negligiu l'efecte de la força de fricció.**

Sí, es posible determinar la masa de un objeto colgándolo de un muelle de constante elástica conocida y midiendo el período de oscilación. Para un sistema masa-muelle que oscila en movimiento armónico simple (MAS), el período de oscilación viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Despejando la masa m:

$$m = \frac{k}{4\pi^2} \cdot T^2.$$

Por lo tanto, midiendo el período T y conociendo la constante elástica k, podemos calcular la masa m del objeto. Para mejorar la precisión, es recomendable medir el tiempo que tarda en completar un número grande de oscilaciones y luego calcular el período medio dividiendo entre el número de oscilaciones. Respecto a si obtendríamos el mismo resultado en la Luna, la respuesta es **sí**. El período de oscilación de un sistema masa-muelle no depende de la aceleración de la gravedad g, ya que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Por lo tanto, la masa calculada sería la misma tanto en la Tierra como en la Luna. Además, en la Luna podríamos obtener una medida más precisa debido a la ausencia de rozamiento con el aire.

b) **Deduïu l'equació de moviment de l'objecte a partir de l'equació del moviment harmònic simple (MHS) tenint en compte que l'amplitud del moviment és de 6,00 cm, que la freqüència d'oscil·lació és de 10,0 Hz i que el moviment s'inicia quan l'acceleració és màxima i positiva. Calculeu la velocitat i l'acceleració màximes del MHS a partir de l'equació de moviment.**

Cálculo de los parámetros del MAS:

- Amplitud:

$$A = 6,00 \text{ cm} = 0,0600 \text{ m}.$$

- Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10,0 \text{ Hz} = 20\pi \text{ rad/s}.$$

La ecuación general del movimiento armónico simple es:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

La aceleración es:

$$a(t) = -\omega^2 x(t).$$

Se indica que en $t = 0$ la aceleración es máxima y positiva, lo que implica que:

$$a(0) = a_{\text{máx}} > 0.$$

Como la aceleración es máxima cuando $x = -A$, tenemos:

$$x(0) = A\sin(\varphi_0) = -A \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = -1.$$

Por lo tanto:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

La ecuación del movimiento es:

$$x(t) = A\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Simplificando:

$$x(t) = A\cos(\omega t).$$

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t).$$

La velocidad máxima es:

$$v_{\text{máx}} = A\omega.$$

Sustituyendo valores:

$$v_{\text{máx}} = 0,0600\ \text{m} \cdot 20\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3,770\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La aceleración es:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t).$$

La aceleración máxima es:

$$a_{\text{máx}} = A\omega^2.$$

Sustituyendo valores:

$$a_{\text{máx}} = 0,0600\ \text{m} \cdot (20\pi\ \text{rad/s})^2 = 236,87\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación del movimiento es:

$$\boldsymbol{x(t) = 0,0600\ \text{m} \cdot \cos(20\pi\ t).}$$

La velocidad máxima es $v_{\text{máx}} = 3,770\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la aceleración máxima es $a_{\text{máx}} = 236,87\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Problema 6. Física Moderna

En les centrals nuclears es produeix electricitat a partir de la fissió de nuclis d'urani. Aquesta energia s'utilitza per a generar vapor d'aigua, que fa girar una turbina. L'urani és un element químic metàl·lic de símbol U i nombre atòmic 92. A la natura trobem diferents isòtops de l'urani, però els més comuns són l'urani 238 i l'urani 235.

a) **Calculeu el defecte de massa i l'energia d'enllaç per nucleó per a l'urani 235, i introduïu el valor obtingut a la taula de sota. Expliqueu la relació entre l'energia d'enllaç per nucleó i l'estabilitat del nucli. A partir d'aquí, indiqueu quin dels nuclis de la taula és el més estable.**

Nucli	Energia d'enllaç per nucleó (MeV)
sofre 34	8,58
ferro 56	8,79
radi 226	7,66
urani 226	

b) **En una reacció nuclear de fissió de l'urani 235, un neutró d'alta energia impacta en un nucli d'urani. Com a resultat, es formen dos nuclis més petits i tres neutrons. Si considerem que un dels nuclis que es formen és el bari 141, escriviu-ne la reacció nuclear completa. Per a cada nucli d'urani fissionat, s'alliberen 202,5 MeV. Calculeu quants grams d'urani 235 són necessaris per a produir l'energia necessària per a il·luminar un estadi esportiu durant un partit en què es consumeixen aproximadament 25 000 kW h.**

Dades:

$c = 3,00 \times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

$1\ \mathrm{eV} = 1,602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$.

Masses nuclears (en kg):

Protó:	$1,672622 \times 10^{-27}$ kg.
Neutró:	$1,674927 \times 10^{-27}$ kg.
Nucli d'urani 235:	$3,902158 \times 10^{-25}$ kg.

Nombre atòmic de diversos elements químics:

Kr:	$Z = 36$
Rb:	$Z = 37$
Sr:	$Z = 38$
Ba:	$Z = 56$
La:	$Z = 57$
U:	$Z = 92$

Solució:

a) **Calculeu el defecte de massa i l'energia d'enllaç per nucleó per a l'urani 235, i introduïu el valor obtingut a la taula de sota. Expliqueu la relació entre l'energia d'enllaç per nucleó i l'estabilitat del nucli. A partir d'aquí, indiqueu quin dels nuclis de la taula és el més estable.**

El uranio-235 tiene:

- Número atómico: $Z = 92$ (número de protones).
- Número másico: $A = 235$ (número total de nucleones).
- Número de neutrones: $N = A - Z = 235 - 92 = 143$.

La masa teórica del núcleo, si sumamos las masas de protones y neutrones separados, sería:

$$m_{\text{teórica}} = Zm_p + Nm_n = 92 \cdot 1{,}672622 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} + 143 \cdot 1{,}674927 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = 3{,}933956 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}$$

La masa real del núcleo de uranio-235 es:

$$m_{\text{uranio-235}} = 3{,}902158 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}.$$

El defecto de masa es:

$$\Delta m = m_{\text{teórica}} - m_{\text{real}} = 3{,}933956 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} - 3{,}902158 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} = 3{,}1798 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}.$$

Cálculo de la energía de enlace total:

$$E_{\text{enlace}} = \Delta m\, c^2 = (3{,}1798 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}) \cdot (3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 2{,}8618 \cdot 10^{-10}\ \text{J}.$$

Convertimos la energía a MeV:

$$E_{\text{enlace}} = \frac{2{,}8618 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \text{J/MeV}} = 1{,}786 \cdot 10^3\ \text{MeV}.$$

Cálculo de la energía de enlace por nucleón:

$$E_{\text{enlace por nucleón}} = \frac{E_{\text{enlace}}}{A} = \frac{1{,}786 \cdot 10^3\ \text{MeV}}{235} = 7{,}6\ \text{MeV}.$$

Actualizamos la tabla:

Núcleo	Energía de enlace por nucleón (MeV)
azufre-34	8,58
hierro-56	8,79
radio-226	7,66
uranio-235	7,60

La energía de enlace por nucleón es una medida de la estabilidad del núcleo. Cuanto mayor sea la energía de enlace por nucleón, más estable es el núcleo, ya que se requiere más energía para separar los nucleones. Asimismo, observando la tabla, el núcleo con mayor energía de enlace por nucleón es el *hierro-56* con 8,79 MeV.

Por lo tanto, el hierro-56 es el núcleo más estable de los listados en la tabla.

b) **En una reacció nuclear de fissió de l'urani 235, un neutró d'alta energia impacta en un nucli d'urani. Com a resultat, es formen dos nuclis més petits i tres neutrons. Si considerem que un dels nuclis que es formen és el bari 141, escriviu-ne la reacció nuclear completa. Per a cada nucli d'urani fissionat, s'alliberen 202,5 MeV. Calculeu quants grams d'urani 235 són necessaris per a produir l'energia necessària per a il·luminar un estadi esportiu durant un partit en què es consumeixen aproximadament 25 000 kW h.**

La reacción general es:

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} + 3\ {}^{1}_{0}\text{n}.$$

Conservación del número de nucleones (A):

$$235 + 1 = 141 + A + 3 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad A = 235 + 1 - 141 - 3 = 92.$$

Conservación del número atómico (Z):

$$92 + 0 = 56 + Z + 0 \quad \Rightarrow \quad Z = 92 - 56 = 36.$$

El elemento con $Z = 36$ es el *Kriptón (Kr).* Por lo tanto, la reacción completa es:

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3\ {}^{1}_{0}\text{n}.$$

Procedemos a calcular la masa de uranio-235 necesaria. Hallamos la energía total consumida por el estadio en julios:

$$E_{\text{total}} = 25\,000\ \text{kWh} \cdot 3{,}6 \cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kWh}} = 9{,}0 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

Convertimos esta energía a MeV:

$$E_{\text{total}} = \frac{9{,}0 \cdot 10^{10}\ \text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \text{J/MeV}} = 5{,}62 \cdot 10^{23}\ \text{MeV}.$$

Obtenemos el número de núcleos de uranio-235 fisionados:

$$n = \frac{E_{\text{total}}}{E_{\text{por fisión}}} = \frac{5{,}62 \cdot 10^{23}\ \text{MeV}}{202{,}5\ \text{MeV}} = 2{,}776 \cdot 10^{21}.$$

Caculamos la masa total de uranio-235 necesaria:

$$m_{\text{total}} = n \cdot m_{\text{núcleo}} = 2{,}776 \cdot 10^{21} \cdot 3{,}902158 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} = 1{,}083\ \text{kg} = 1{,}083\ \text{kg} \cdot 1\,000\ \frac{\text{g}}{\text{kg}} = 1{,}083\ \text{g}.$$

Por lo tanto, se necesitan 1,083 gramos de uranio-235 para producir la energía necesaria para iluminar el estadio.

Problema 7. Física Moderna

Volem construir un sensor de radiació ultraviolada que sigui sensible a radiacions de longitud d'ona de 300 nm. Decidim utilitzar l'efecte fotoelèctric com a principi del sensor. Així doncs, utilitzarem una cèl·lula fotoelèctrica que emeti electrons. Per al bon funcionament d'aquesta cèl·lula, cal que l'energia mínima dels electrons emesos sigui d'1 eV.

a) **Calculeu la longitud d'ona llindar del material que hauríem d'utilitzar per a construir la cèl·lula.**

b) **Empleneu la taula de sota amb els valors de la longitud d'ona llindar dels tres materials donant el resultat en nanòmetres. Si podem triar un dels tres materials mostrats a la taula de sota per a construir la cèl·lula, quin triaríeu? Justifiqueu la resposta.**

Element	Símbol	Funció de treball (J)	Longitud d'ona llindar (nm)
tungstè	W	$8,36 \times 10^{-19}$	
magnesi	Mg	$5,86 \times 10^{-19}$	
potassi	K	$3,67 \times 10^{-19}$	

Dades:
$1\ \text{eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J.
$c = 3,00 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}$.
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ J s.

Solució:

a) **Calculeu la longitud d'ona llindar del material que hauríem d'utilitzar per a construir la cèl·lula.**

Cálculo de la función de trabajo requerida:
Según el efecto fotoeléctrico, la energía cinética máxima de los electrones emitidos viene dada por:

$$E_c = hf - W_0,$$

donde:
- E_c es la energía cinética máxima de los electrones (1 eV),
- h es la constante de Planck,
- f es la frecuencia de la radiación incidente,
- W_0 es la función de trabajo del material.

La frecuencia de la radiación de longitud de onda $\lambda = 300$ nm es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{300 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 1 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}.$$

La energía del fotón incidente es:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot f = 6,63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 1,00 \cdot 10^{15}\ \text{Hz} = 6,63 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Convertimos esta energía a electronvoltios:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1,602 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 4,14\ \text{eV}.$$

Despejamos la función de trabajo W_0:

$$W_0 = hf - E_c = E_{\text{fotón}} - E_c = 4,14\ \text{eV} - 1\ \text{eV} = 3,14\ \text{eV}.$$

Convertimos W_0 a julios:

$$W_0 = 3,14\ \text{eV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 5,03 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

La longitud de onda umbral λ_0 corresponde a la frecuencia umbral f_0 para la cual $E_c = 0$:

$$W_0 = hf_0 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{5,03 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6,63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 7,58 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

La longitud de onda umbral es:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3,00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{7,58 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}} = 3,96 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 396\ \text{nm}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda umbral del material que debemos utilizar es $\boldsymbol{\lambda_0 = 396}$ nm.

b) Empleneu la taula de sota amb els valors de la longitud d'ona llindar dels tres materials donant el resultat en nanòmetres. Si podem triar un dels tres materials mostrats a la taula de sota per a construir la cèl·lula, quin triaríeu? Justifiqueu la resposta.

La longitud de onda umbral se calcula mediante:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0}.$$

Para el tungsteno (W):

$$W_0 = 8,36 \cdot 10^{-19}\ \text{J},$$

$$\lambda_{0,\text{W}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3,00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{8,36 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 2,38 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 238\ \text{nm}.$$

Para el magnesio (Mg):

$$W_0 = 5,86 \cdot 10^{-19}\ \text{J},$$

$$\lambda_{0,\text{Mg}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3,00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{5,86 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 3,39 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 339\ \text{nm}.$$

Para el potasio (K):

$$W_0 = 3,67 \cdot 10^{-19}\ \text{J},$$

$$\lambda_{0,\text{K}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3,00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{3,67 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 5,42 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 542\ \text{nm}.$$

La tabla actualizada es:

Elemento	Símbolo	Función de trabajo (J)	Longitud de onda umbral (nm)
tungsteno	W	$8,36 \cdot 10^{-19}$	238
magnesio	Mg	$5,86 \cdot 10^{-19}$	339
potasio	K	$3,67 \cdot 10^{-19}$	542

Para que el sensor sea sensible a radiaciones de $\lambda = 300$ nm y que los electrones emitidos tengan al menos una energía cinética de 1 eV, necesitamos un material cuya longitud de onda umbral sea mayor o igual a $\lambda_0 = 396$ nm. Observamos que:

- Tungsteno: $\lambda_{0,\text{W}} = 238$ nm < 396 nm
- Magnesio: $\lambda_{0,\text{Mg}} = 339$ nm < 396 nm
- Potasio: $\lambda_{0,\text{K}} = 542$ nm > 396 nm

Por lo tanto, el único material que cumple con el requisito es el *potasio (K)*.

Por lo tanto, se debe elegir el potasio, ya que su longitud de onda umbral (542 nm) es mayor que la necesaria (396 nm), lo que permite que al iluminarlo con luz de 300 nm se emitan electrones con una energía cinética mínima de 1 eV.